PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO I

1) Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto A(-1,0,4) y es perpendicular a la recta r $\equiv \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{5}$

2) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(3,1,0) y es perpendicular a la recta r $\equiv \begin{cases} x+2y-3z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$

3) Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos A = (1,1,0), B = (0,0,-1) y es paralelo a la recta r : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = -2-3t \end{cases}$

4) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A = (3,0,2), B = (-1,2,1) y es paralelo a la recta r = $\begin{cases} 2x+3y-z+1=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$

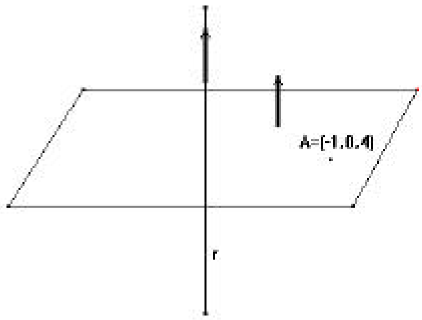
5) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. $r \equiv \begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv x+2y-3z+5=0$

6) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A = (-1, 2, 0) y es perpendicular a los planos π: x + 4y - z +1 = 0 y π'= -x + y + z –3 = 0.

7) Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta r: $\begin{cases} x+2y+z-3=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$ y contiene a la recta r´: $\begin{cases} 3x-y+3z=0 \\ x \qquad +z-3=0 \end{cases}$

SOLUCIONES

1)



$\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (-1,2,5) \rightarrow \pi = -x + 2y + 5z + d = 0$ como el punto A pertenece al plano, debe cumplir su ecuación, luego sustituyendo A en la ecuación hallamos el valor d.

1+20+d = 0 →d = - 21

→ **π = -x + 2y + 5z - 21 = 0**

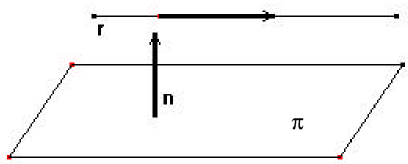
2) Si conociéramos el vector director de la recta r, el problema sería análogo al anterior. Para hallar el vector director de r se pueden hallar las ecuaciones paramétricas de r o hacer el producto vectorial de los vectores perpendiculares a los planos que determinan la recta r (ésto último es lo que haremos)

$$\overrightarrow{n_1} = (1,2,-3) \quad \overrightarrow{n_2} = (2,-1,1) \quad \overrightarrow{n_1}\ x\ \overrightarrow{n_2} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1,-7,-5)$$

La ecuación del plano es: x + 7y + 5z + d = 0, como el punto P(3,1,0) está en el plano, entonces 3 + 7 + d = 0, d = -10, por lo tanto la ecuación del plano es:

x + 7y +5z – 10 = 0

3) Los vectores $\overrightarrow{d_r}\ y\ \overrightarrow{AB}$ son los vectores directores del plano, luego su producto vectorial es el vector $\overrightarrow{n_\pi}$.



$$\overrightarrow{AB} = (0,0,-1) - (1,1,0) = (-1,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{d_r} = (2,-1,-3)$$

$$\vec{d_r}\ x\ \vec{AB} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2,5,-3) = \vec{n_\pi}$$

La ecuación del plano, conociendo el vector perpendicular al plano y el punto B perteneciente al plano es: -2(x - 0) + 5(y - 0) + (-3)(z + 1) = 0, **2x –5y +3z + 3 = 0**

4) Al igual que en el problema anterior, los vectores $\overrightarrow{d_r}\ y\ \overrightarrow{AB}$ son los vectores directores del plano, luego su producto vectorial es el vector $\overrightarrow{n_\pi}$.

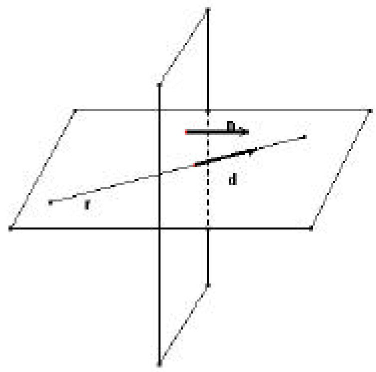
$$\overrightarrow{AB} = (-1,2,1) - (3,0,2) = (-4,2,-1)$$

$$\overrightarrow{d_r} = (2,3,-1)\ x\ (1,1,1) = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4,-3,-1)$$

$$\vec{d_r}\ x\ \vec{AB} = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \right) = (5,8,-4) = \vec{n_\pi}$$

Conociendo el vector perpendicular al plano, otra forma de hallar la ecuación es:
5x + 8y – 4z + d = 0, y sustituyendo A = (3,0,2) en la ecuación se calcula d.
15 – 8 + d = 0, d = - 7, la ecuación del plano es: π: **5x + 8y – 4z – 7 = 0**

5) Los vectores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$ son los vectores directores del plano pedido y punto cualquiera de la recta r está en el plano buscado.
Si nos fijamos en las ecuaciones de r, el punto A = (1, 0, 0) cumple sus dos ecuaciones, por lo que está en r y también en el plano.



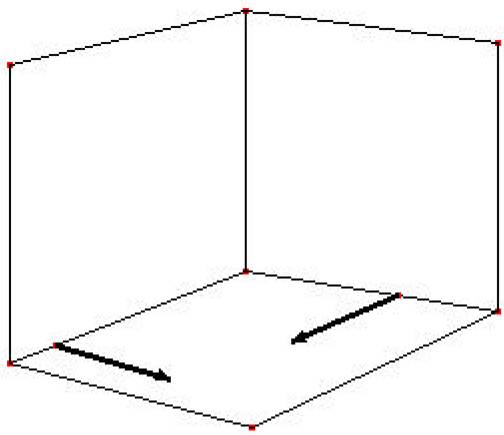
$$\vec{d_r} = (1,1,-3)x(2,-1,1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$(-2,-7,-3); \quad \overrightarrow{n_\pi} = (1,2,-3)$$

La ecuación del plano, conociendo los dos vectores directores y un punto viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \pi´: \mathbf{-27x + 9y - 3z + 27 = 0}$$

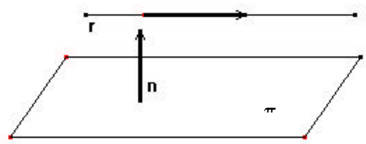
6) Los vectores $\vec{n_\pi}$ y $\vec{n_{\pi´}}$ son los vectores directores del plano buscado, y la ecuación del plano conocidos los vectores directores y un punto es:



$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ,} \pi´´\text{:}\mathbf{x + z + 1 = 0}$$

7) Si contiene a la recta r´, tiene su dirección y todos sus puntos, para hallarlos calculamos, primero, sus ecuaciones paramétricas: (pasamos z al segundo miembro)

$$r´ \equiv \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x \qquad + z - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow r´ \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 9 \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_{r´} = (3,9,0) \\ \overrightarrow{d_{r´}} = (-1,0,1) \end{matrix}$$



$$\overrightarrow{d_r} = (1,2,1) \; x \; (1,-1,-1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1,2,-3)$$

La ecuación del plano conociendo los dos vectores directores y el punto (3,9,0) es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-9 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{x + 2y + z - 21 = 0} \equiv \pi$$